التمرين 1 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f(x) = x.e^{-\sqrt{x}}$$

1. أ- تحقق من أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \; f(x) = 4\left(\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}}\right)^2$.

ب- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة العددية f على اليمين في الصفر .

ب- تحقق أن: $\forall x \in]0,+\infty[: \; f'(x) = \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{x}\right)e^{-\sqrt{x}}$.

جـ- أعط جدول تغيرات الدالة f .

3. ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 4cm$.

أ- حدد إحداثيتي نقطة انعطاف المنحنى $(\mathcal{C})$.

ب- أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$.

التمرين 2 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{2(e^x+1)}{e^x-1}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- حدد D حيز تعريف الدالة f .

ب- أحسب نهايات f عند محدات D .

جـ- حدد مقاربات $(\mathcal{C})$.

2. بين أن f دالة فردية .

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من D ؛ واستنتج تغيرات الدالة f .

4. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$.

التمرين 3 :

لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (2x-3)e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} & ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- حدد D حيز تعريف الدالة f .

ب- أحسب نهايات f عند محدات D .

جـ- حدد مقاربات $(\mathcal{C})$.

2. أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في النقطة 1 ثم أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .

ب- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\} \; ; \; f'(x) = \dfrac{2x^2-6x+5}{(x-1)^2}e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$

جـ- أعط جدول تغيرات الدالة f .

3. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$.

التمرين 4 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} & ; \quad x < 1 \\ f(x) = x-1-\dfrac{\ln x}{x} & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بين أن الدالة f متصلة في النقطة 1 .

2. أ- أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 1 .

ب- بين أن : $\forall x \in]-\infty,1[\; ; \; f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$.

جـ- تحقق أن f تزايدية قطعا على المجال $]1,+\infty[$.

د- أعط جدول تغيرات الدالة f .

3. أ- تحقق أن المستقيم (D) ذا المعادلة : $y = x-1$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$ ؛ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C})$ والمستقيم (D) على المجال $]1,+\infty[$.

ب- بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = 0$ ؛ وأول النتيجة هندسيا .

4. أرسم $(\mathcal{C})$. (تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب ونقبل أن $(\mathcal{C})$ يوجد تحت مقاربه على $]-\infty,1[$)

التمرين 5 :

لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x+(x-1)\ln(x-1) & ; \quad x > 1 \\ f(x) = x-1-e^{x-1} & ; \quad x \leq 1 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن f متصلة في النقطة 1 .

2. أثبت أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ وأحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3. بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ وأن : $f'_g(1) = 0$ ؛ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين .

4. أ- أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ ؛ وأدرس إشارتها .

ب- استنتج أن الدالة f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty,1]$ و $[2,+\infty[$ ؛ وتناقصية على $[1,2]$.

جـ- كون جدول تغيرات الدالة f .

5. أثبت أن $(\mathcal{C})$ يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب والمستقيم المعرف بالمعادلة $y = x-1$ كمقارب مائل .

6. أ- بين أنه يوجد عدد α من المجال $]4,5[$ بحيث : $f(\alpha) = 0$.
(نأخذ : $\ln 2 \approx 0,7$ و $\ln 3 \approx 1,1$)

ب- أنشئ $(\mathcal{C})$.

التمرين 6 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=x-\frac{1}{2}\ln\left|e^{x}-e^{-x}\right|$.

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .
2. أ- أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ب- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3. أ- بين أن : $\forall x\in D \quad ; \quad f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{e^{2x}-3}{e^{2x}-1}$.

ب- أدرس إشارة $f'(x)$.

جـ- أعط جدول تغيرات f .

4. أ- بين أن : $\forall x\in D \quad ; \quad f(x)-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right|$.

ثم استنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=\frac{3}{2}x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $-\infty$.

ب- بين أن : $\forall x\in D \quad ; \quad f(x)-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}\ln\left|1-e^{-2x}\right|$.

واستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.

5. أدرس تقعر المنحنى $(\mathcal{C})$.
6. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$.

التمرين 7 :

$\boxed{I}$ لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$g(x)=x+2\ln(1-x)$$

1. ضع جدول تغيرات الدالة g على المجال $[0,1[$.
2. بين أن : $\forall x\in]1,+\infty[\quad ; \quad 0<\frac{1}{2x-1}<1$.
3. استنتج أن : $\forall x\in]1,+\infty[\quad ; \quad \frac{1}{2x-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{2x-1}\right)<0$.

$\boxed{II}$ نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)^2\ln\left(1-\frac{1}{2x-1}\right) & ; \quad x>1 \\ f(x)=x(x-1)^2e^{2x} & ; \quad x\le 1 \end{cases}$$

1. أ- حدد D حيز تعريف الدالة f .

ب- أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 1.

2. أ- بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^{2x}=0$ واستنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (يمكن وضع : $t=-\frac{1}{2x-1}$) .

3. أ- أحسب $f'(x)$ لكل $x<1$.

- تحقق أن : $\forall x\in]1,+\infty[\; ; \; f'(x)=(x-1)g\left(\frac{1}{2x-1}\right)$.

ب- حدد إشارة $f'(x)$ من أجل $x<1$ ؛ ثم من أجل $x>1$.

جـ- ضع جدول تغيرات الدالة f .

4. ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نقبل أن المستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.

أ- أعط معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C})$ في النقطة التي أفصولها 0 .

ب- أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$.

التمرين 8 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}$

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$)

1. أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R} \; : \; f(-x)+f(x)=2$ ؛ ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مركز تماثل A ينبغي تحديد زوج إحداثيتيه .

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (يمكن وضع : $t=e^{x}$) ؛ ثم استنتج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربين ينبغي تحديد معادلتيهما .

جـ- أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ؛ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على حيز تعريفها .

2. أ- حدد معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة التي أفصولها 0 .

ب- لتكن φ الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $\varphi(x)=f(x)-(x+1)$.

بين أن : $\forall x\in\mathbb{R} \; : \; \varphi'(x)=-\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^2$ ؛

واستنتج تغيرات الدالة φ ؛ ثم حدد إشارتها. (أحسب $\varphi(0)$)

جـ- استنتج مما سبق الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (T) .

3. أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (T) و مقاربيه .

التمرين 9 :

أحسب النهايات التالية :

$i)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^2}$; $v)$: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}^{x}-1}{x-1}$

$ii)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{x}$; $vi)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

$iii)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4e^{-x}$; $vii)$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^{3x}-e^{x}}$

$iv)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^3+1}$; $viii)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$